

# Derivada topológica: aplicaciones al diseño de metamateriales acústicos

**C. Méndez<sup>1</sup>, J. M. Podestá<sup>1</sup>, S. Toro<sup>1</sup>**

**P.J. Sánchez<sup>1</sup>, A. E. Huespe<sup>1,2</sup>,**

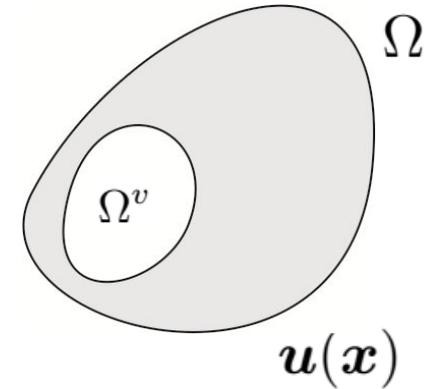
**J. Oliver<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> *Centro de Investigación en Métodos Computacionales, CIMEC-UNL-CONICET, **Argentina***

<sup>2</sup> *International Center for Numerical Methods in Engineering (CIMNE), Barcelona, **Spain***

# El concepto de derivada topológica

Sea un problema de valores de contorno (PVC),  
elíptico, definido en el dominio  $\Omega \in \mathbb{R}^d$ ,  
 $\Omega$  no es simplemente conexo



$\mathcal{J}(\chi, \mathbf{u})$  : funcional  $(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R})$



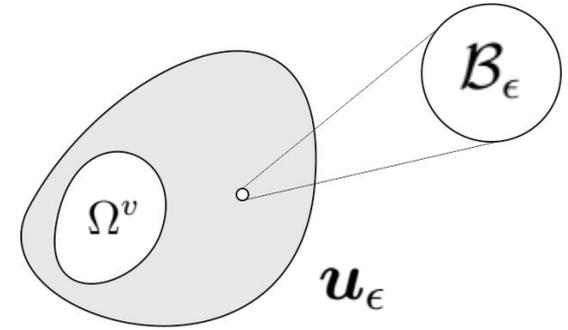
Función característica

$$\chi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0; & \text{en } \Omega^v \\ 1; & \text{en } \Omega \setminus \Omega^v \end{cases}$$

# El concepto de derivada topológica

$$\mathcal{J}_\epsilon(\chi_\epsilon, \mathbf{u}_\epsilon)$$

$$\chi_\epsilon(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0; & \text{en } \Omega^v \cup \mathcal{B}_\epsilon \\ 1; & \text{en } \Omega \setminus (\Omega^v \cup \mathcal{B}_\epsilon) \end{cases}$$



Solución del PVC perturbado  
por la inclusión de la bola  $\mathcal{B}_\epsilon$

$$D_T \mathcal{J} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{J}_\epsilon - \mathcal{J}}{f(\epsilon)}$$

← Área de la bola  $\mathcal{B}_\epsilon$

$$\mathcal{J}_\epsilon = \mathcal{J} + f(\epsilon) D_T \mathcal{J} + \mathcal{O}(\epsilon); \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{O}(\epsilon)}{f(\epsilon)} = 0$$

Optimización de topología y forma

Diseño óptimo de microestructuras

Aplicaciones de derivada topológica

Procesamiento de imágenes

Problemas inversos

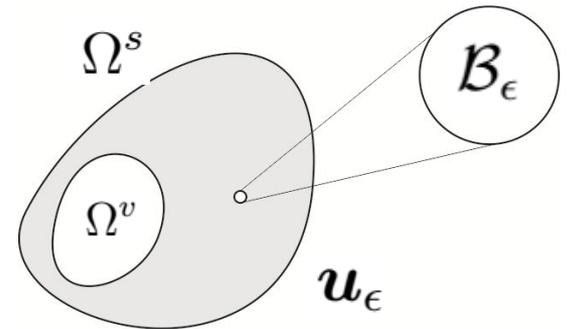
[Ammari, H., & Kang, H. \(2007\). \*Polarization and moment tensors: with applications to inverse problems and effective medium theory\* \(Vol. 162\). Springer Science & Business Media.](#)

# Problema de optimización de topología

$$\min_{\chi} \mathcal{J}(\chi, \mathbf{u})$$

Sujeto a una restricción admisible:

$$\Omega^s \left( = \int_{\Omega} \chi \, dv \right) > \Omega_0$$

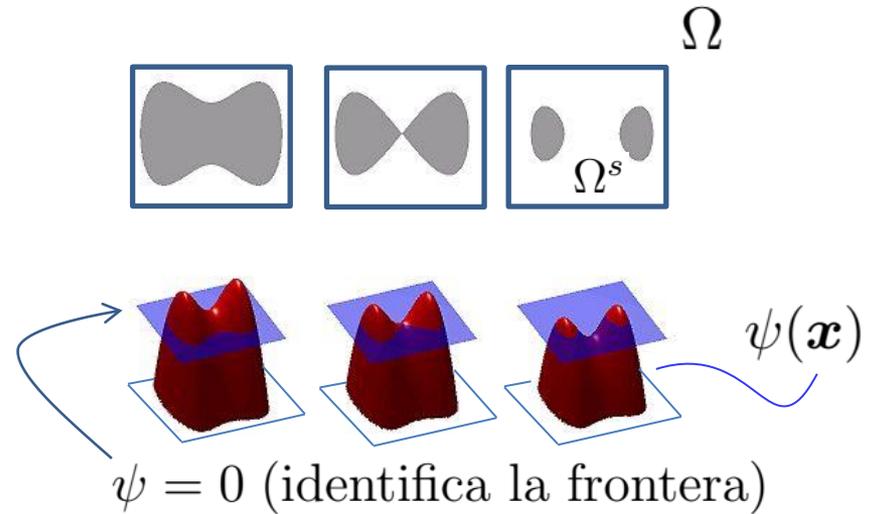


# Metodología de solución

Función level-set

$$\psi \in C^0(\Omega) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\psi(\mathbf{x}) = \begin{cases} > 0; & \text{en } \Omega^v \\ < 0; & \text{en } \Omega^s \end{cases}$$



$$\min_{\psi} \mathcal{J}(\psi, \mathbf{u})$$

$$\text{Sujeto a: } \Omega^s > \Omega_0$$

# Metodología de solución

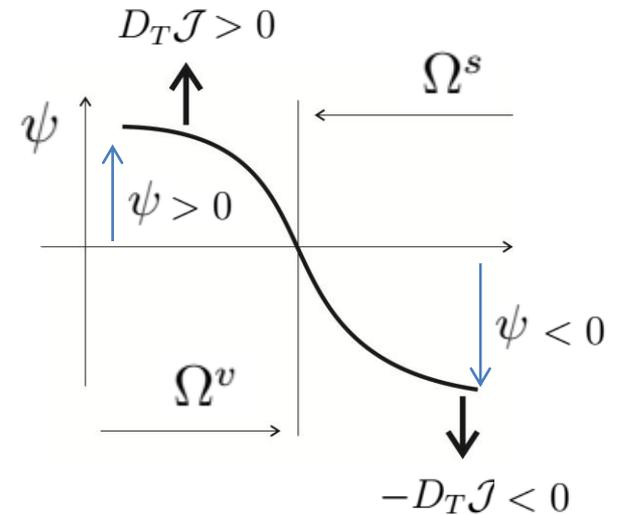
Algoritmo de **punto fijo** con una actualización del tipo “steepest descent”

$$\psi_{n+1} = \psi_n + \alpha g$$

$$g(\mathbf{x}) = \begin{cases} D_T \mathcal{J}; & \text{en } \Omega^v \\ -D_T \mathcal{J}; & \text{en } \Omega^s \end{cases}$$

Derivada topológica

Función costo aumenta



Función costo aumenta

**Condición de optimalidad:**  $\psi_{n+1}$  y  $g$  son paralelos

$$\arccos \left[ \frac{\langle \psi_{n+1}, g \rangle}{\|\psi_{n+1}\|_{L^2} \|g\|_{L^2}} \right] = 0$$

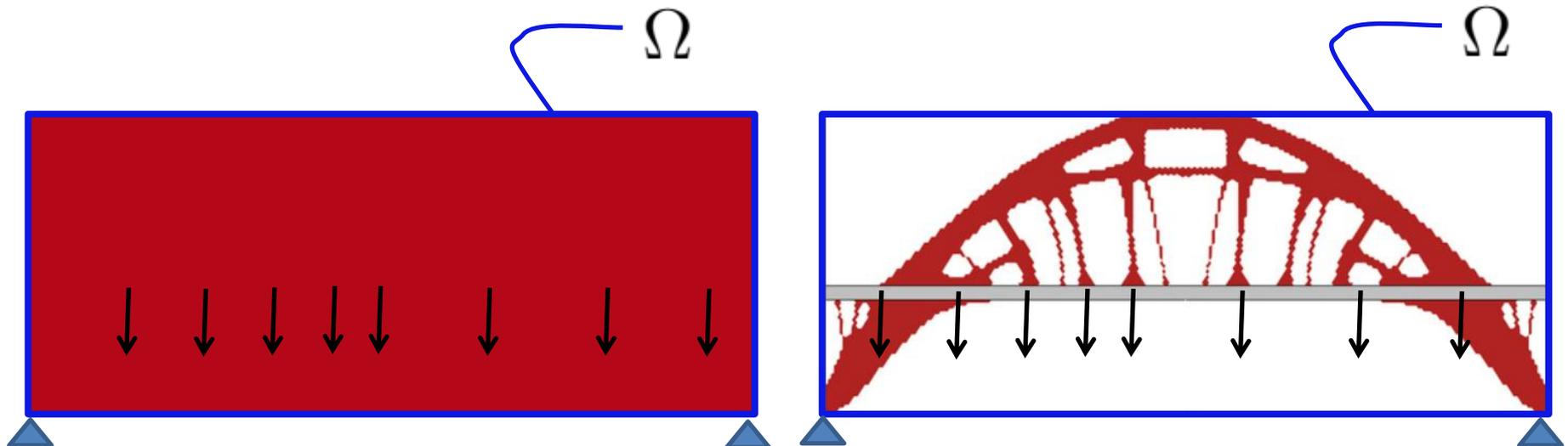
# Ejemplo de optimización topológica en aplicaciones mecánicas

Funcional: energía de deformación

$$\mathcal{J} = \int_{\Omega^s} (\nabla^s \mathbf{u} : \mathbf{C} : \nabla^s \mathbf{u}) dv;$$

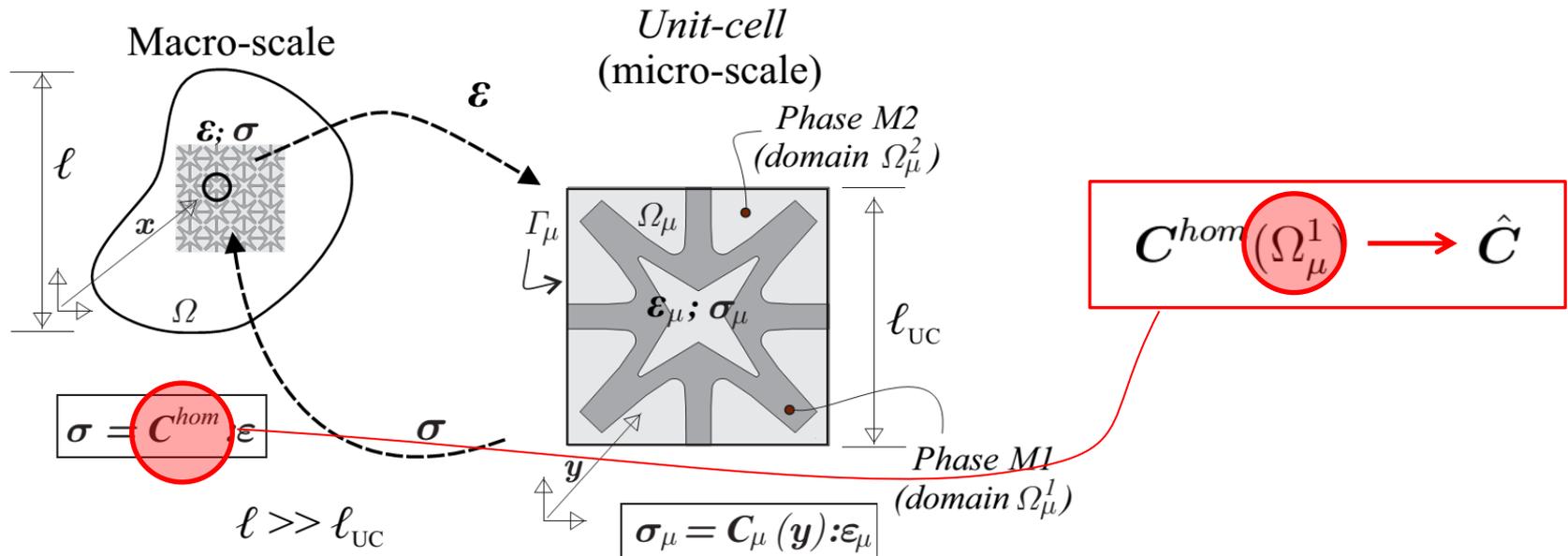
$$\min_{\chi} \mathcal{J}(\chi, \mathbf{u}) \quad \text{maximizar rigidez estructural}$$

sujeto a:  $\int_{\Omega} \chi dv < \Omega^0$



# Aplicaciones al diseño de materiales (metamateriales)

- Homogenización de las propiedades efectivas de un material heterogéneo (homogeneización computacional)



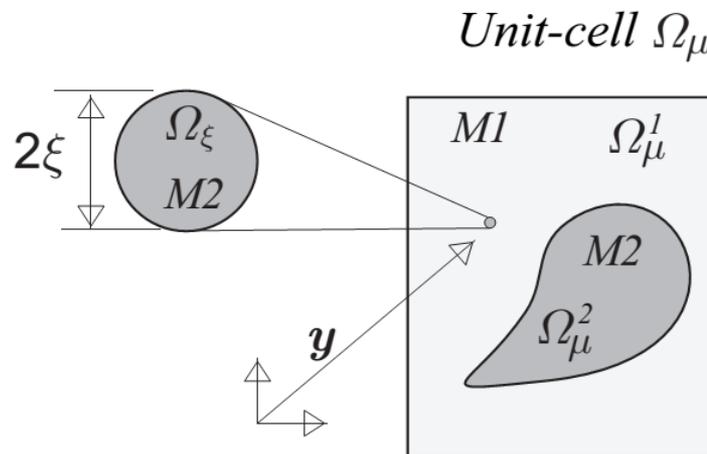
# Diseño de materiales como un problema de optimización de topología

$$\min_{\psi} \mathcal{J}(\psi, \mathbf{u}) = \min_{\psi} \left( \left\| \mathbf{C}^{hom}(\psi) - \hat{\mathbf{C}} \right\| \right)$$

Tensor elástico a obtener

**Este problema no tiene solución única!!**

## Derivada topológica del tensor efectivo del material



$$\mathbf{C}_{pert}^{hom} = \mathbf{C}^{hom} + \frac{|\Omega_{\xi}|}{|\Omega_{\mu}|} \mathbf{D}_T \mathbf{C}^{hom}(\mathbf{y}) + \mathcal{O}\left(\frac{|\Omega_{\xi}|}{|\Omega_{\mu}|}\right)$$

## Validación del procedimiento de diseño

Diseño de la microestructura de un material extremo, bifásico e isotrópico que posee máxima relación:  $\hat{\kappa}/\hat{G}$

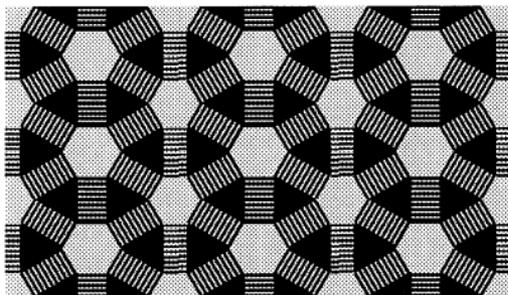
$$K_1 = 5/7 \quad K_2 = K_1/20$$

$$G_1 = 5/13 \quad G_2 = G_1/20$$

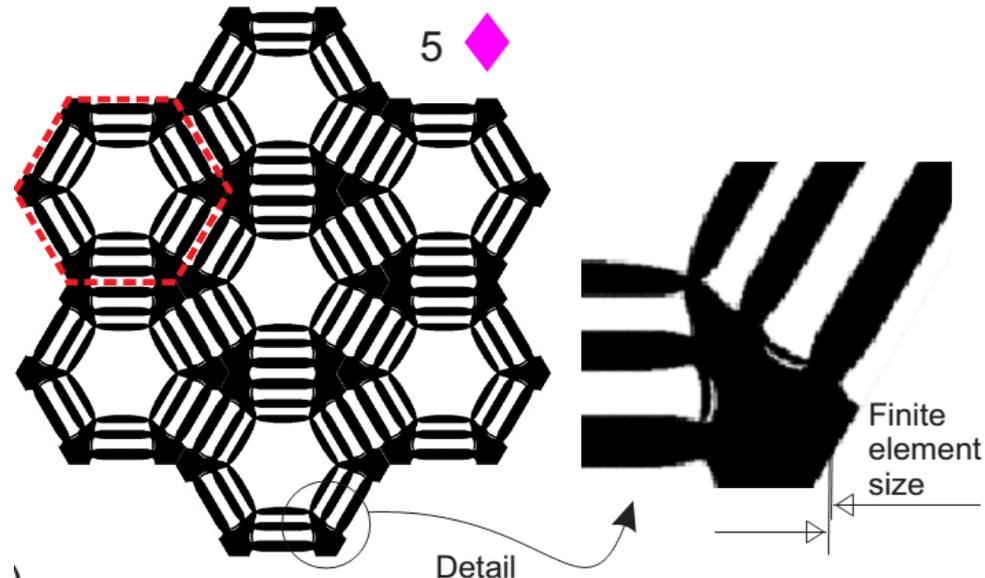
Tensor de elasticidad de acuerdo a límites analíticos

$$\mathbf{C}_{W_p} = \begin{bmatrix} 0.2738 & 0.1732 & 0 \\ 0.1732 & 0.2738 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0503 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_5^{hom} = \begin{bmatrix} 0.279 & 0.161 & 0.000 \\ 0.161 & 0.279 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.059 \end{bmatrix}$$



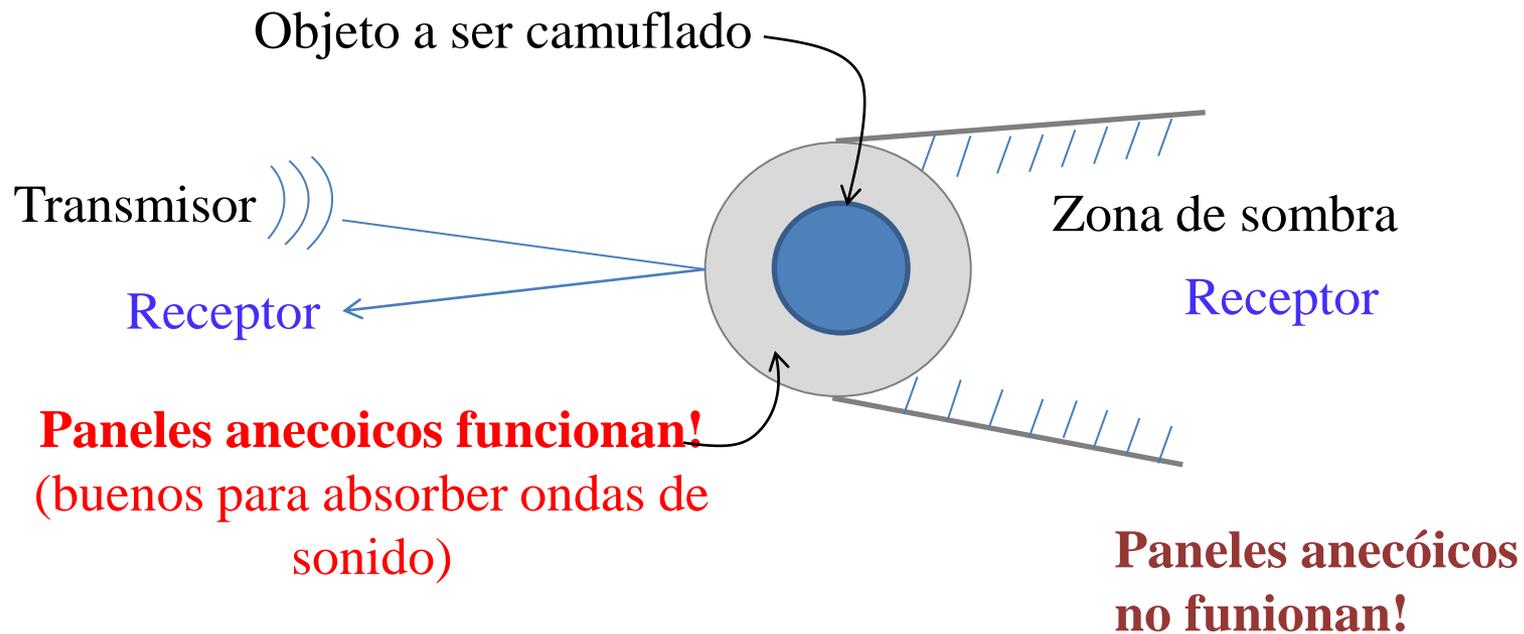
(Sigmund, J. Mech. Phys. Solids 2000)



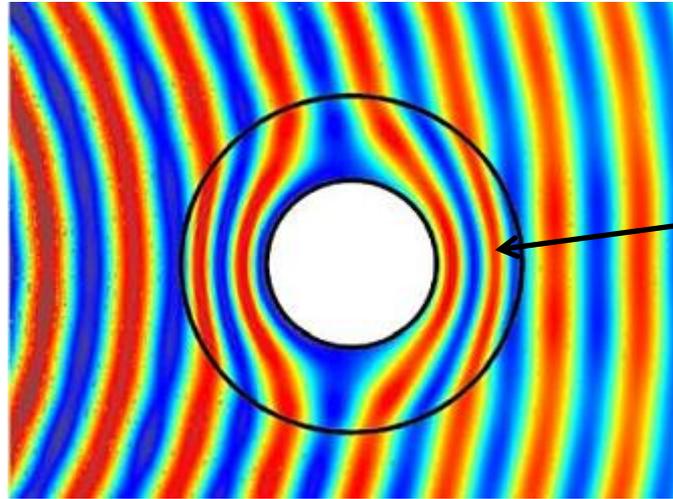
# Aplicación a un problema de diseño de metamaterial acústico

**‘Camuflaje acústico’ se refiere a la invisibilidad de un objeto al paso de una onda acústica**

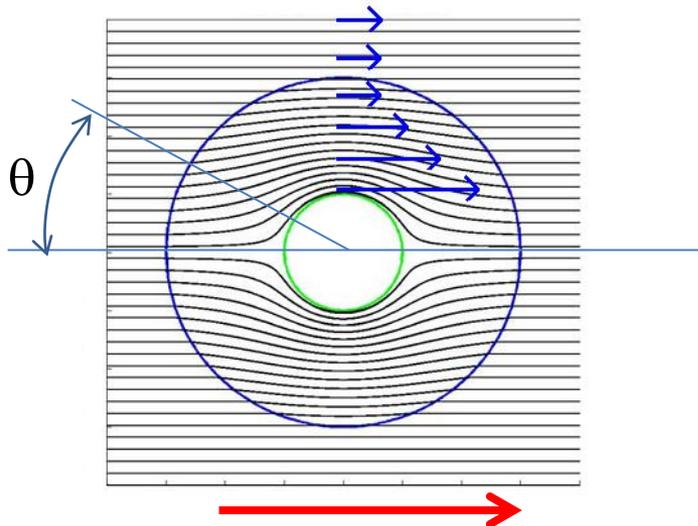
A qué clase de invisibilidad nos referimos?



# Objetivo: construir un dispositivo acústico que no produzca reflexión ni zona de sombra

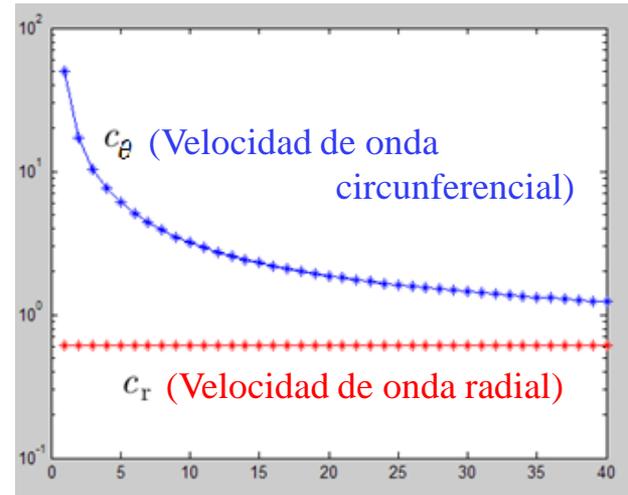


Dispositivo de camuflaje acústico



Dirección de propagación de onda

Ray tracing



$\theta$

En 2006 se logró un avance importante para obtener invisibilidad de ondas electromagnéticas

Leonhardt, (2006, Science); Pendry et .al, (2006, Science), introducen la observación clave de que las transformaciones singulares pueden ser utilizadas para lograr este objetivo

**Este avance se generalizó para conseguir camuflaje acústico**

**(Cheng, Appl. Phys. Letters, 2008, Norris, Proc. Royal Soc. London 2008)**

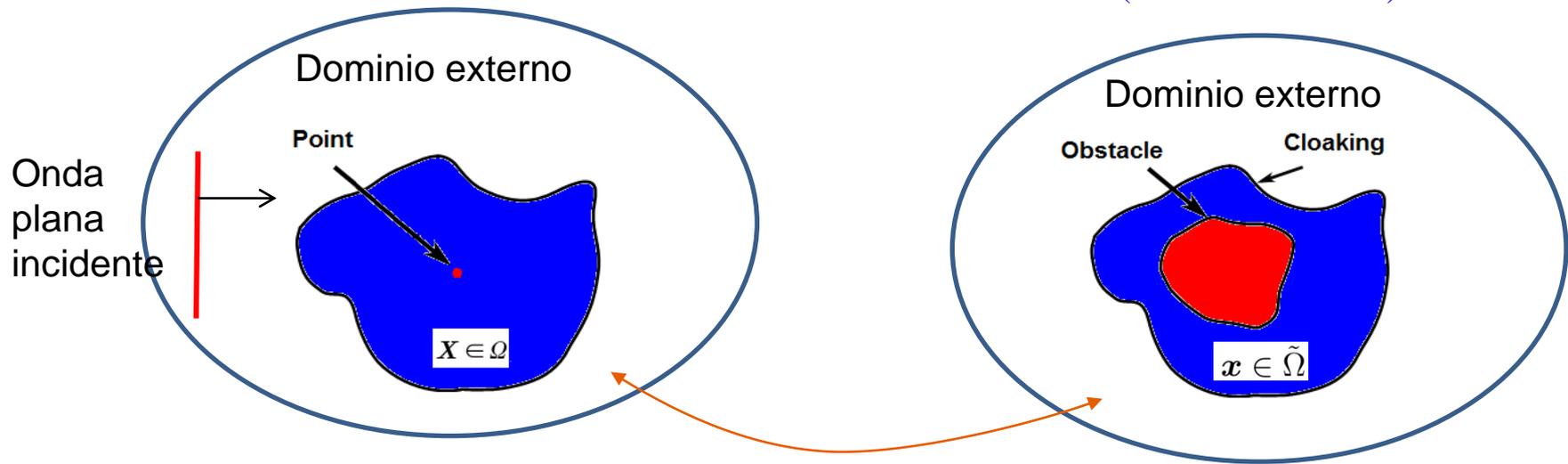
# Transformación aústica (Norris, Proc. R. Soc. A 2008)

Útil para camuflaje omnidireccional

**Mapa uno-a-uno que deforma un dominio de modo conveniente**

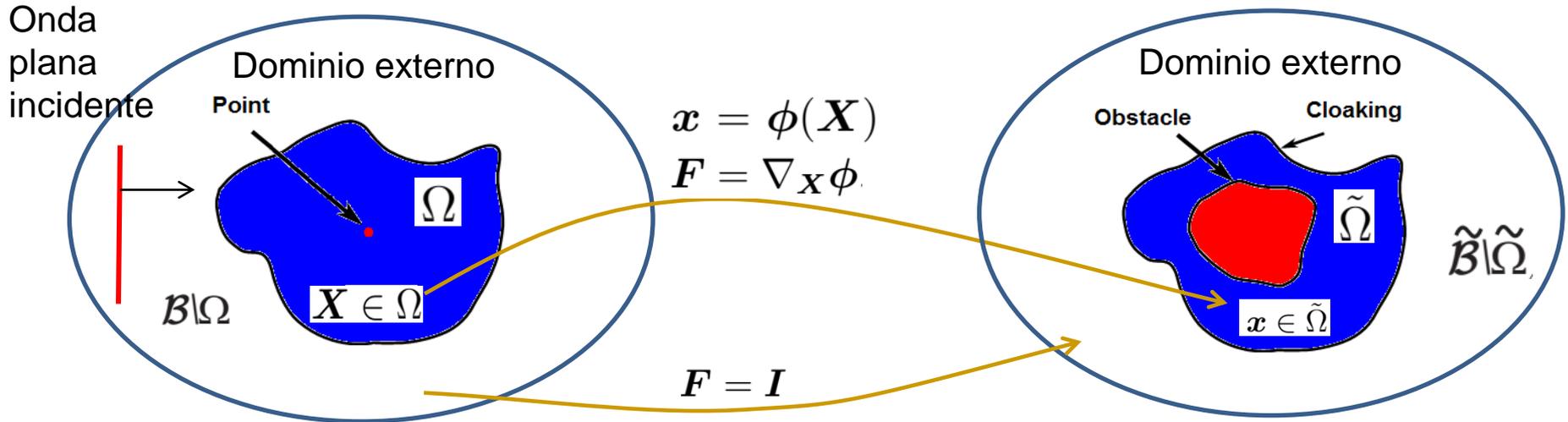
Espacio de **referencia** (no-deformado)  
resistencia nula al “scattering”

Espacio **Físico**  
(transformado)



(mapa uno-a-uno- fuera del camuflaje)

# Ecuación de la onda en el espacio físico y de referencia



$$\ddot{p} - \kappa_0 \operatorname{div}_X (\rho_0^{-1} \nabla_X p) = 0$$

$$\ddot{p} - \kappa_0 J \operatorname{div}_x ((\rho_0 J)^{-1} V^2 \cdot \nabla_x p) = 0$$

$$\ddot{\hat{p}} - \kappa \operatorname{div}_x ((\rho)^{-1} \cdot \nabla_x \hat{p}) = 0$$

$$J = \det \mathbf{F}$$

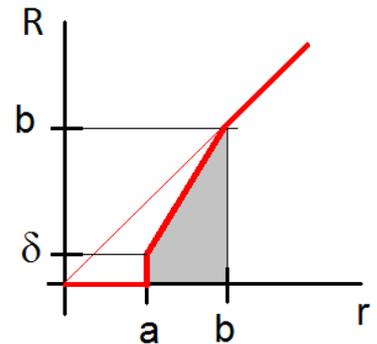
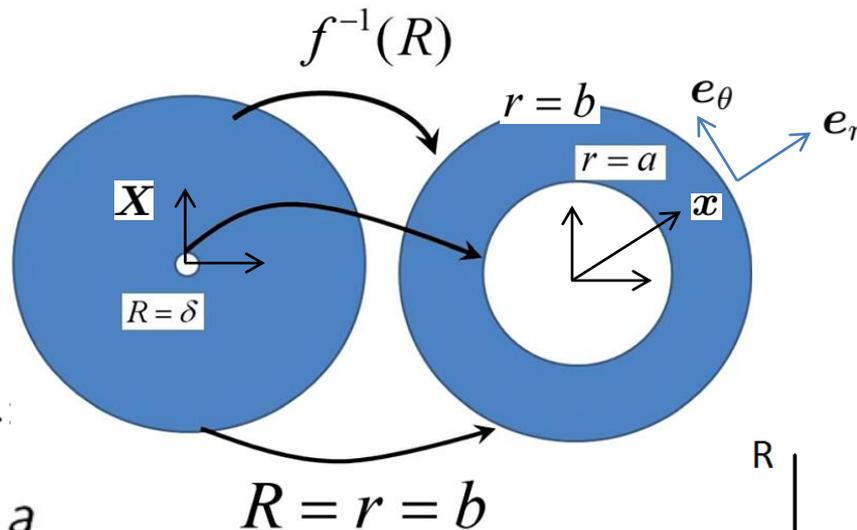
$$V^2 = \mathbf{F} \mathbf{F}^T$$

Módulo volumétrico  
efectivo isotrópico

Masa inercial efectiva  
anisotrópica

## Ejemplo: obstáculo rotacionalmente simétrico

Transformación de coordenada 2D. La región cilíndrica de radio  $b$  es comprimida a una cáscara concéntrica cilíndrica de radio  $a < r < b$  (Chen, 2008)



$$\mathbf{X} = f(r)\hat{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{F} = (1/f')\mathbf{I}_r + (r/f)\mathbf{I}_\perp$$

$$\mathbf{I}_r = \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r ; \mathbf{I}_\perp = \mathbb{1} - \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r$$

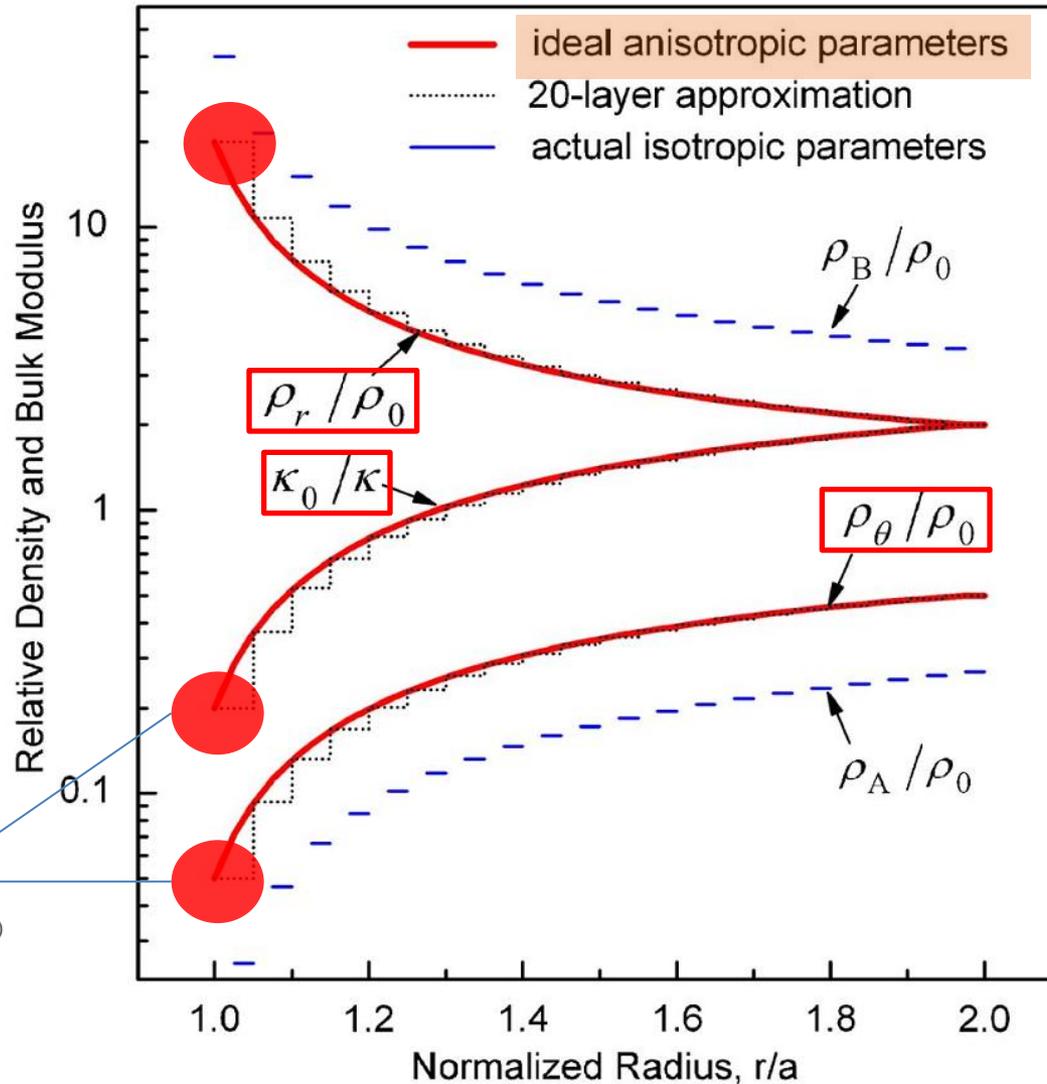
$$R = f(r) = \delta \frac{b-r}{b-a} + b \frac{r-a}{b-a}$$

$$\kappa = \frac{1}{f'} \left( \frac{r}{f} \right)^{-1}$$

$$\rho = \left( \frac{r}{f} \right)^{-1} \left( f' \mathbf{I}_r + \frac{f^2}{r^2 f'} \mathbf{I}_\perp \right)$$

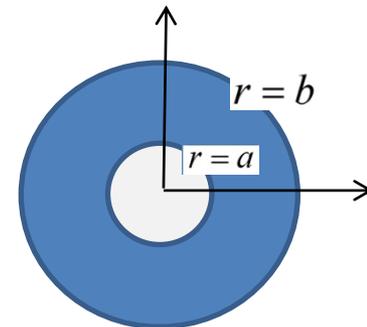
$$\rho = \rho_r \mathbf{I}_r + \rho_\perp \mathbf{I}_\perp$$

**Camuflaje perfecto**  
 $\delta \rightarrow 0$



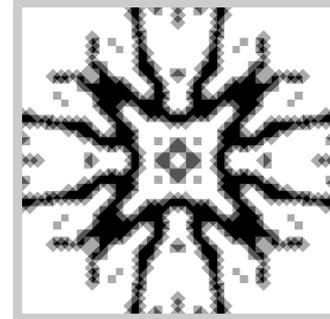
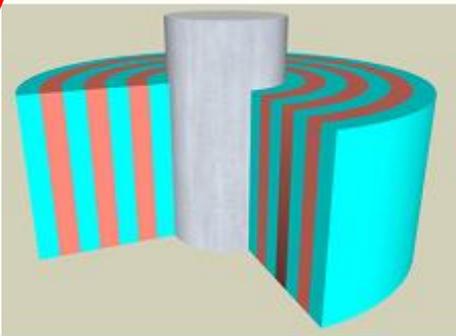
$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \kappa; \rho_\theta = -\infty$$

$$\delta = 0.05a$$



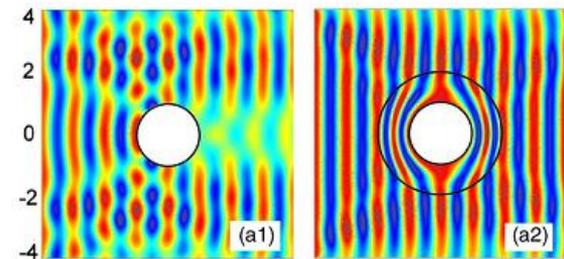
**Diseño de material  
utilizando optimización  
topológica**

**Resultados analíticos  
para camuflaje  
acústico**



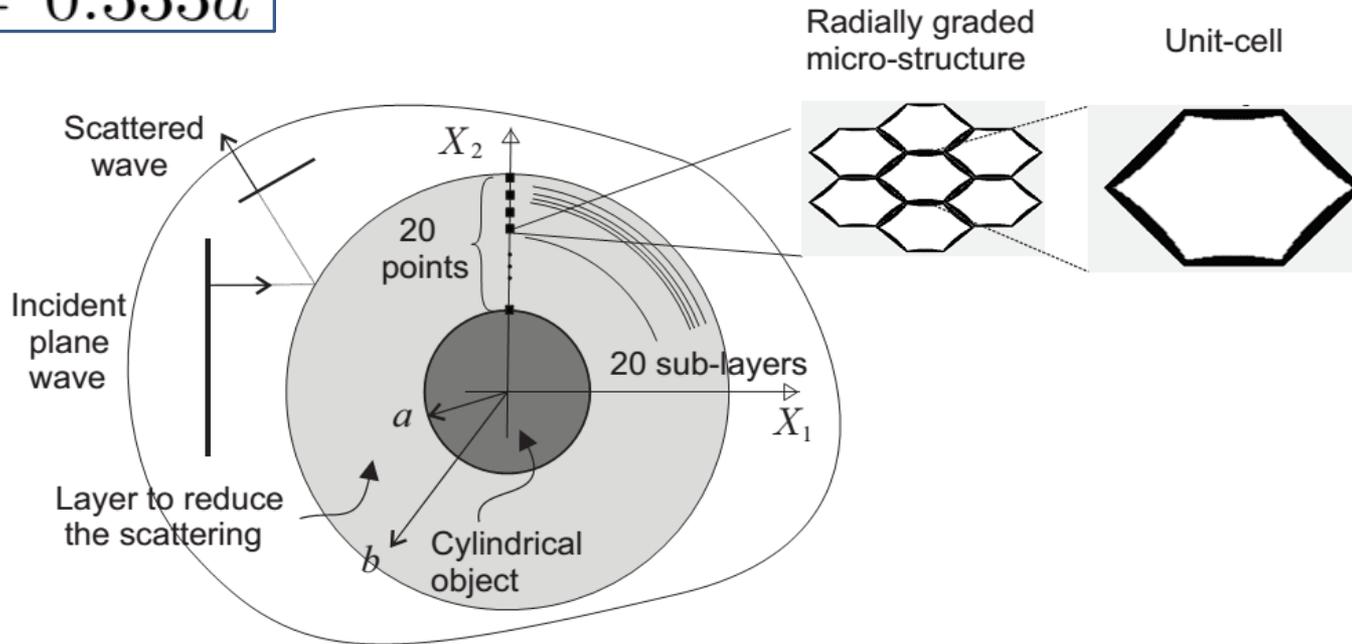
**Comparación**

**Simulación**



# Diseño del material para camuflaje acústico

$$\delta = 0.333a$$



Medio: agua

Fase rígida: Aluminio

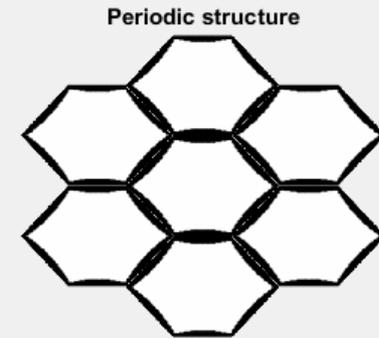
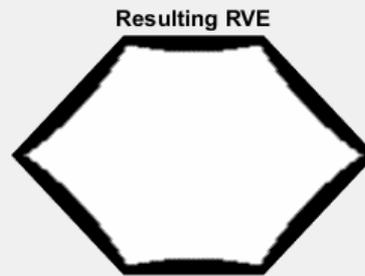
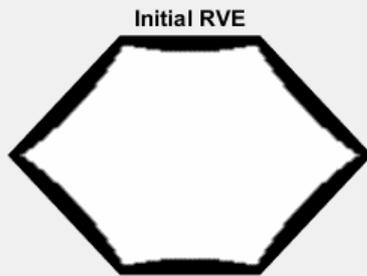
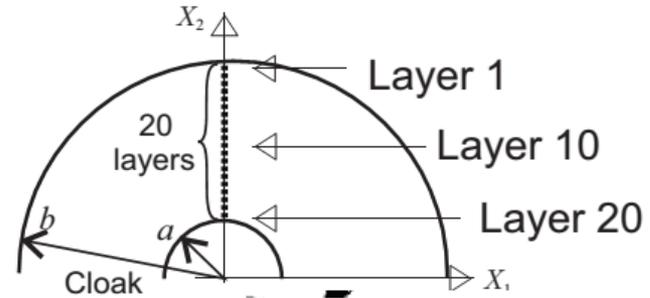
$$\kappa_{Al} = 70.GPa,$$

$$G_{Al} = 25.5GPa$$

$$\rho_{Al} = 2700.Kg/m^3$$

Fase blanda: Polimero

# Resultado para la capa15



**Effective Elastic Tensor**

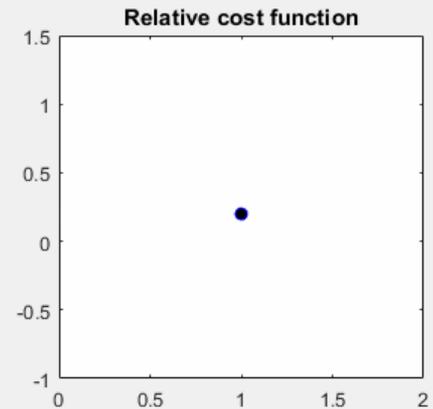
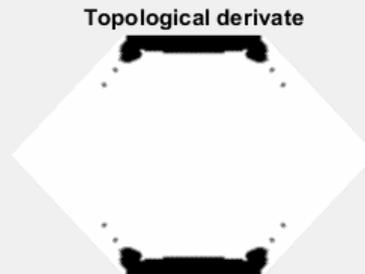
|       |       |       |
|-------|-------|-------|
| 7.305 | 3.136 | 0.000 |
| 3.136 | 3.284 | 0.000 |
| 0.000 | 0.000 | 2.386 |

**Required Elastic Tensor**

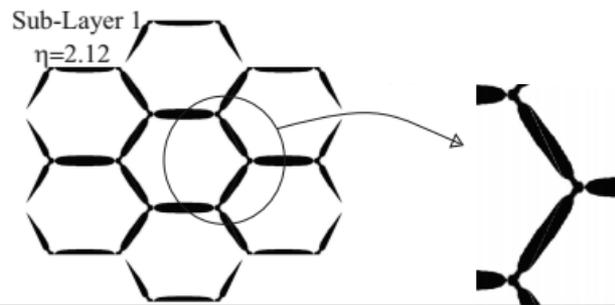
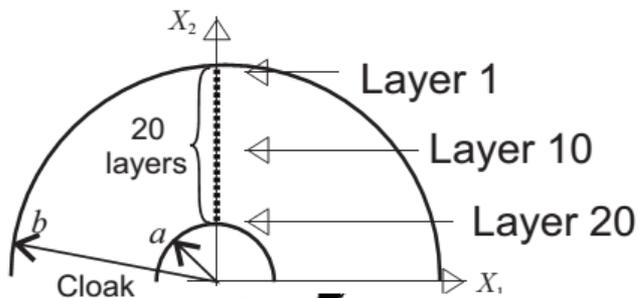
|       |       |       |
|-------|-------|-------|
| 9.890 | 2.250 | 0.000 |
| 2.250 | 0.512 | 0.000 |
| 0.000 | 0.000 | 0.000 |

**Required  $\rho$     Obtained  $\rho$**

|       |       |
|-------|-------|
| 0.902 | 0.589 |
|-------|-------|



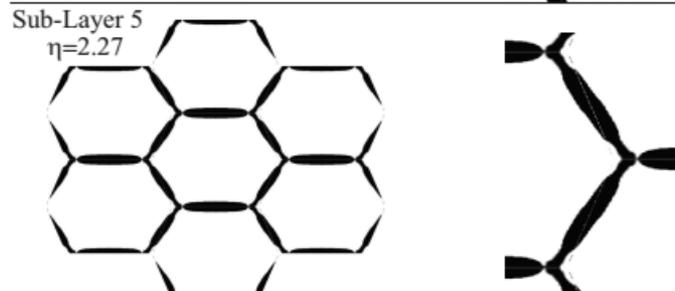
# Resultados para diferentes capas



$$C^{hom} = \begin{bmatrix} 3.292 & 2.234 & -0.000 \\ 2.234 & 1.561 & 0.000 \\ -0.000 & 0.000 & 0.003 \end{bmatrix}$$

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} 3.281 & 2.250 & 0.000 \\ 2.250 & 1.543 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 \end{bmatrix}$$

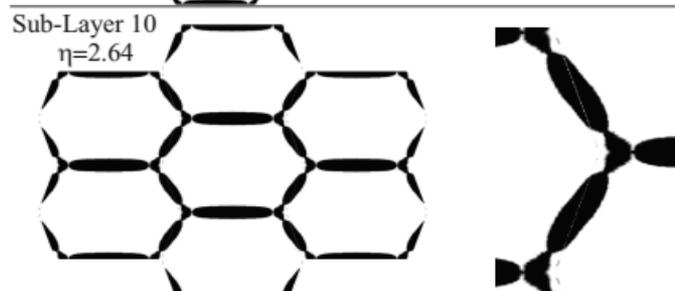
$$\hat{\rho} = 1.442 \quad \rho^{OT} = 0.419$$



$$C^{hom} = \begin{bmatrix} 3.612 & 2.226 & -0.000 \\ 2.226 & 1.438 & 0.000 \\ -0.000 & 0.000 & 0.004 \end{bmatrix}$$

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} 3.600 & 2.250 & 0.000 \\ 2.250 & 1.406 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\rho} = 1.414 \quad \rho^{OT} = 0.430$$



$$C^{hom} = \begin{bmatrix} 4.304 & 2.233 & -0.000 \\ 2.233 & 1.206 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.004 \end{bmatrix}$$

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} 4.298 & 2.250 & 0.000 \\ 2.250 & 1.178 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 \end{bmatrix}$$

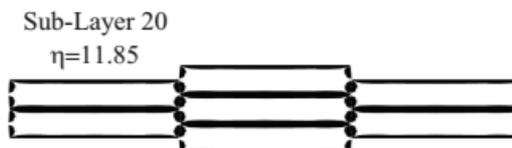
$$\hat{\rho} = 1.348 \quad \rho^{OT} = 0.469$$



$$C^{hom} = \begin{bmatrix} 5.898 & 2.234 & 0.000 \\ 2.234 & 0.888 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.005 \end{bmatrix}$$

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} 5.893 & 2.250 & 0.000 \\ 2.250 & 0.859 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 \end{bmatrix}$$

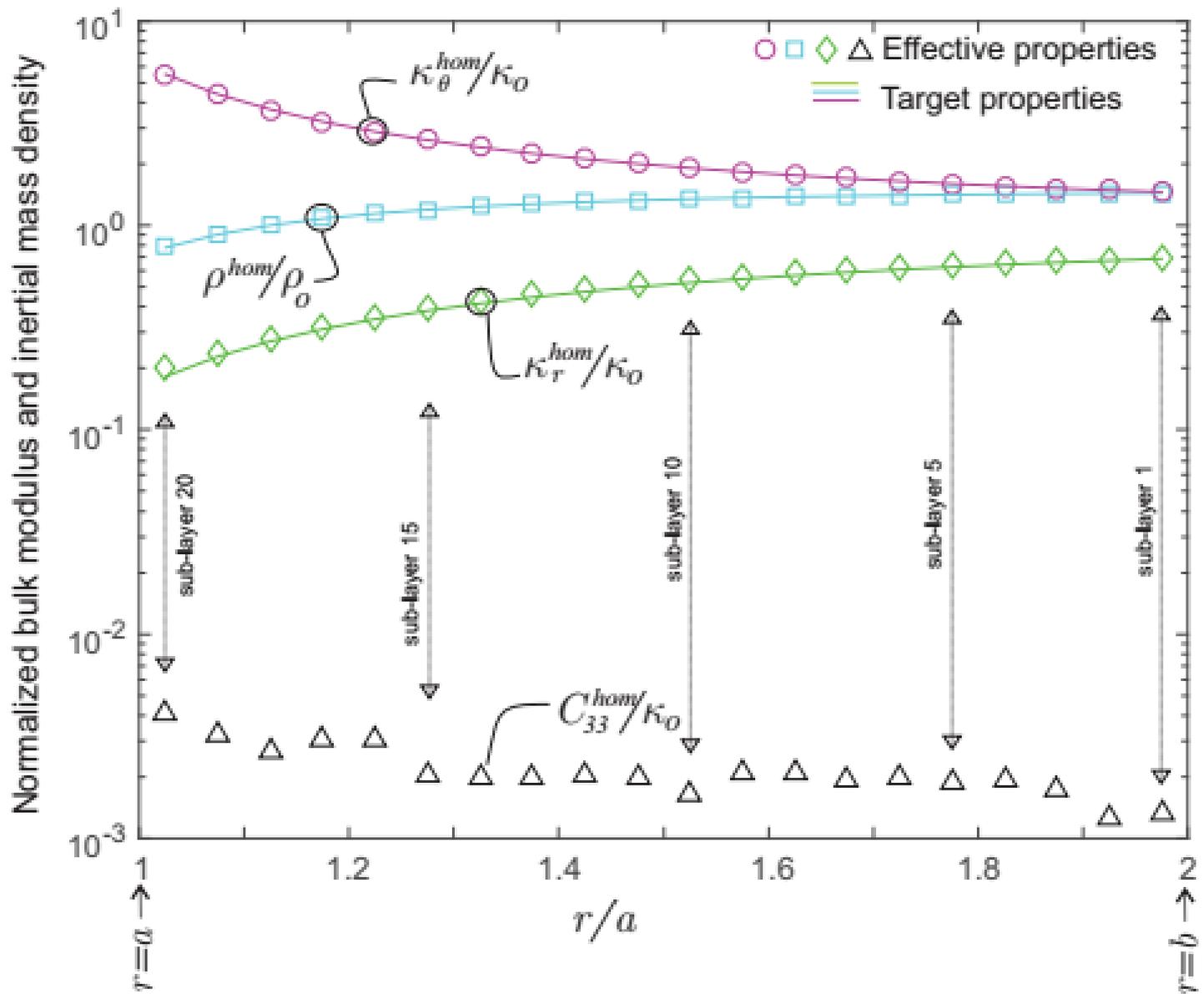
$$\hat{\rho} = 1.195 \quad \rho^{OT} = 0.474$$



$$C^{hom} = \begin{bmatrix} 12.363 & 2.237 & -0.001 \\ 2.237 & 0.458 & 0.000 \\ -0.001 & 0.000 & 0.009 \end{bmatrix}$$

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} 12.371 & 2.250 & 0.000 \\ 2.250 & 0.409 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\rho} = 0.778 \quad \rho^{OT} = 0.729$$



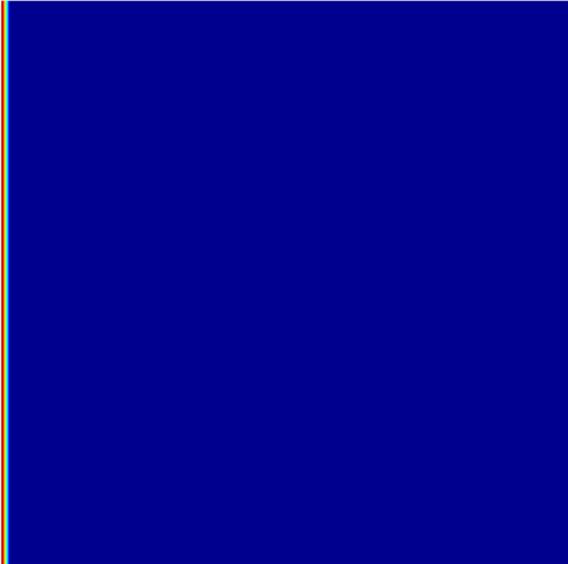
# Simulación numérica del camuflaje diseñado

Simulación en el dominio del tiempo

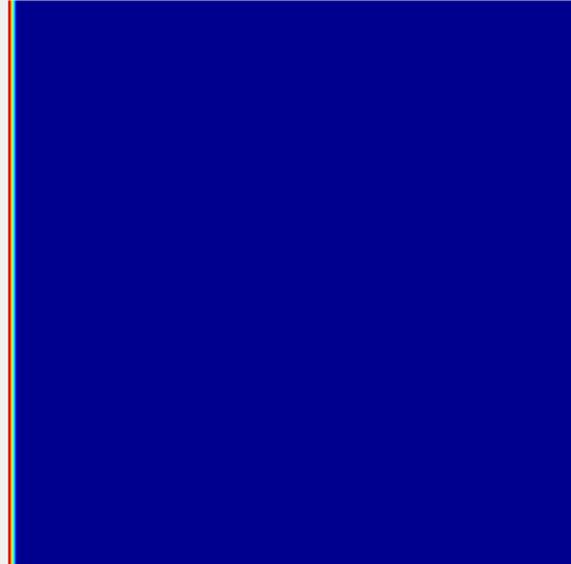
**Obstáculo desnudo**

**Obstáculo camuflado**

Without Cloaking

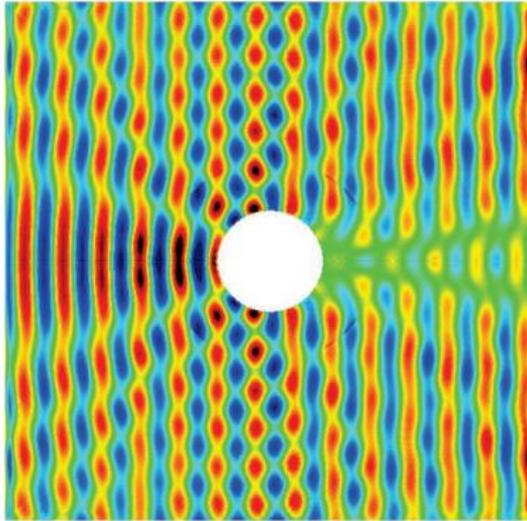


With Cloaking

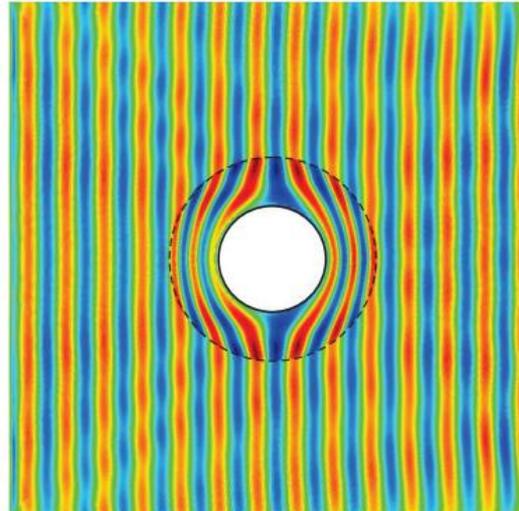


# Simulación mediante análisis armónico

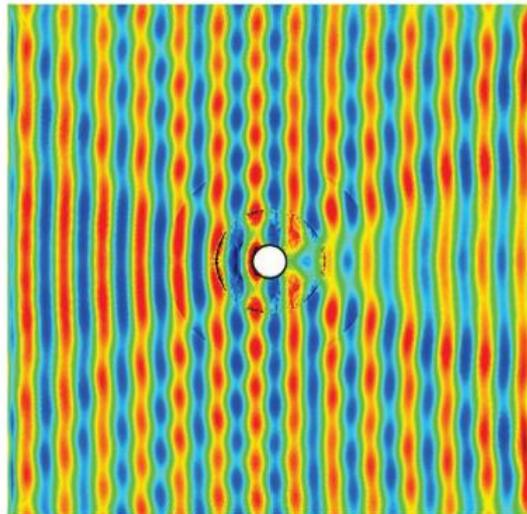
Bare cylinder of  $a=1.m$



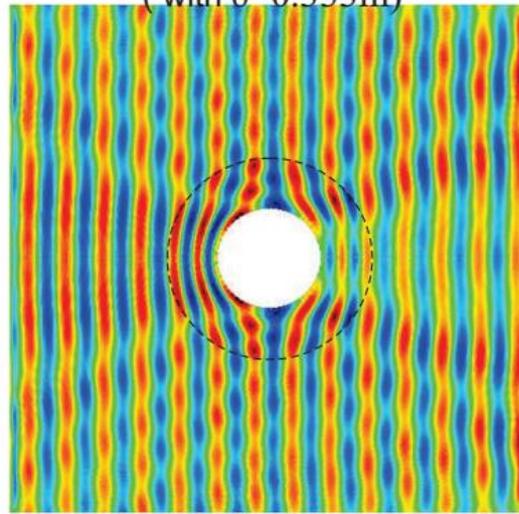
Perfect cloak  
(analytical solution with  $\delta=0.m$ )



Bare cylinder of  $a_r=0.333m$



Designed cloak  $a=1.m$   
( with  $\delta=0.333m$ )



## Algunas conclusiones

Optimización topológica es una herramienta eficiente para diseñar la arquitectura de metamateriales que requieren propiedades inusuales.

Con esta técnica, no es necesario conjeturar cuál será la distribución del material al nivel de la microestructura.

- Derivada topológica
- Función level-set

Punto posible de colaboración entre un matemático y un ingeniero !!

Utilización de derivada topológica para otros tipos de problemas inversos y tratamiento de imágenes

?